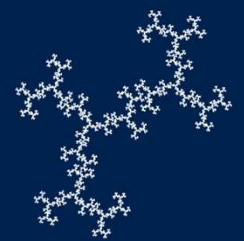
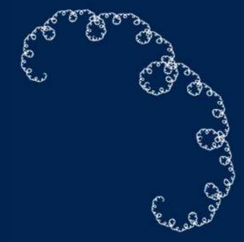
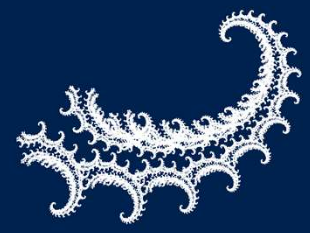



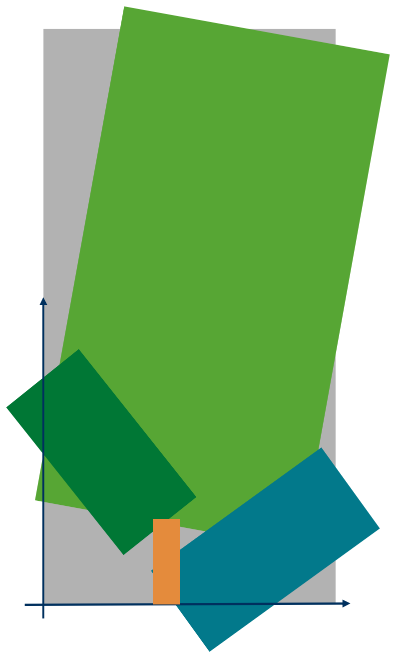
FRAKTALE





Wie affine Funktionen selbstähnliche Mengen erzeugen

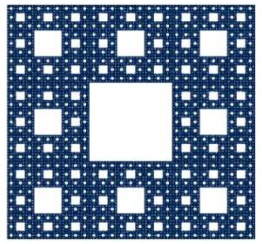
Der originale Barnsley-Farn, benannt nach dem britischen Mathematiker Michael Barnsley (* 1946), der sich als einer der ersten mit Fraktalen beschäftigte.



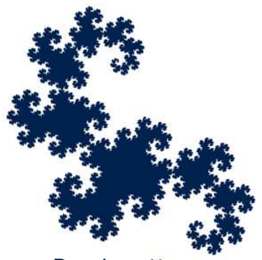
Iteriertes Funktionensystem für den obigen Barnsley-Farn.

Fraktale können verschiedenste Objekte in der Natur modellieren, beispielsweise das Aussehen von Wolken oder die Blattstruktur eines Farns. Sie besitzen eine sogenannte „gebrochene Dimension". Viele Fraktale haben die Eigenschaft, selbstähnlich zu sein, bestehen also aus mehreren kleinen Kopien von sich selbst.

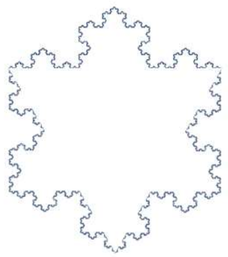
Um ein Fraktal zu erzeugen, werden wir sogenannte *iterierte Funktionensysteme aus affinen Funktionen* benutzen. Mit diesen Systemen lässt sich eine Vielfalt von Fraktalen beschreiben, unter anderem alle auf diesem Plakat. Auf untenstehender Website lassen sich diese Fraktale erstellen.



Sierpinski-Teppich



Drachen-Kurve



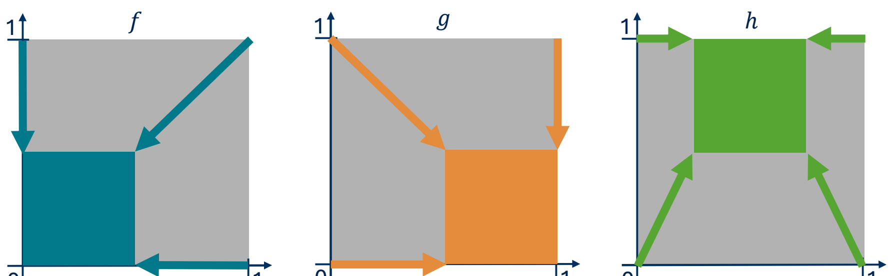
Koch-Schneeflocke

Wie erzeuge ich ein Fraktal?

Die Grundlagen: Iterierte Funktionensysteme

Wir wollen ein Fraktal in der Ebene, im $\mathbb{R}^2$, erstellen. Dazu benötigen wir zunächst *affine Funktionen*. Das sind Funktionen, die strecken oder stauchen, verschieben, spiegeln oder drehen, in beliebiger Kombination. Sie bilden Quadrate auf Rechtecke ab. Um diese Funktionen zu veranschaulichen, kann man sich beispielsweise ansehen, worauf sie das Einheitsquadrat (auf den untenstehenden Bildern als **graues** Quadrat markiert) abbilden. Endlich viele dieser Funktionen ergeben ein *iteriertes Funktionensystem*.

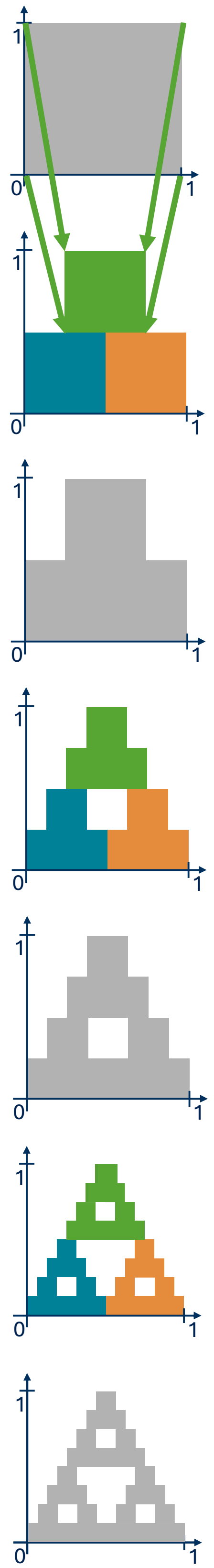
Beispielsweise können wir die drei affinen Funktionen f, g und h betrachten:



$f(x,y) := \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$ $g(x,y) := \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ $h(x,y) := \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Um aus diesem iterierten Funktionensystem immer eine beschränkte Menge zu erhalten, fordern wir zusätzlich noch von unseren Funktionen, dass sie das Einheitsquadrat auf ein Rechteck abbilden, das in seiner Länge oder Breite kleiner ist als das ursprüngliche Quadrat.

Jedes solche iterierte Funktionensystem erzeugt ein eindeutiges Fraktal. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dieses Fraktal zu bestimmen. Im Folgenden werden wir auf zwei Arten das Fraktal bestimmen, das f, g und h erzeugen.



Kopieren und Einfügen

Diese Methode beruht auf der Tatsache, dass Fraktale selbstähnlich sind.

Wir beginnen mit dem Einheitsquadrat. Die Methode besteht nun aus den folgenden Schritten (vgl. links; auf dem ersten Bild von oben ist das Einheitsquadrat grau ausgefüllt).

1. Wende die erste Funktion auf die Form an. Das Ergebnis ist eine Form in $\mathbb{R}^2$ (vgl. das **grüne** Quadrat im Bild 2; hier haben wir h angewendet).
2. Wiederhole diesen Schritt für alle Funktionen aus dem iterierten Funktionensystem (hier f und g, bzw. das **blaue** und **orangefarbene** Quadrat im Bild 2).
3. Füge all diese Formen zusammen (vgl. Bild 3) und wiederhole das Verfahren mit der neuen Form.

Diese Abfolge endet nicht. Nach genügend vielen Wiederholungen ändert sich die Form jedoch nur noch minimal; wenn wir das Verfahren oft genug anwenden, können wir so etwas zeichnen, das dem Fraktal beliebig nahe kommt.

Zufallspunkt-Verfahren

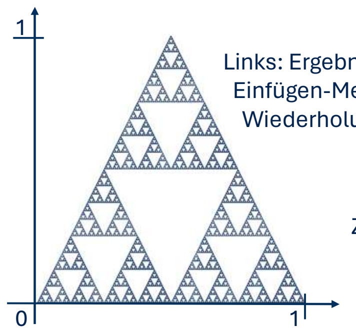
Es gibt weitere Möglichkeiten, Fraktale zu berechnen. Die unten erwähnte Website benutzt das sogenannte Zufallspunkt-Verfahren.

Wir beginnen damit, einen zufälligen Punkt p_0 auf eine Ebene einzuzeichnen. Das Verfahren besteht aus den folgenden Schritten (vgl. rechts).

1. Wähle zufällig eine der Funktionen aus dem iterierten Funktionensystem aus, beispielsweise die Funktion f.
2. Berechne den Punkt $p_1 := f(p_0)$ und zeichne ihn auf die Ebene, auf der schon p_0 eingezeichnet ist.
3. Wähle zufällig eine neue Funktion aus, zum Beispiel h.
4. Berechne $p_2 := h(p_1)$ und zeichne ihn zu p_0 und p_1.
5. Wiederhole das so lange, bis genug Punkte für eine detaillierte Zeichnung bestimmt wurden.

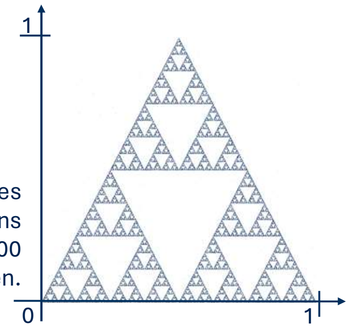
Die ersten Punkte werden neben dem eigentlichen Fraktal liegen, dieser Fehler wird allerdings nach wenigen Schritten so gering sein, dass wir ihn mit dem Auge nicht mehr wahrnehmen können. Eine Möglichkeit, diesen Fehler unsichtbar zu machen, ist zum Beispiel, die ersten hundert Punkte nicht zu zeichnen.

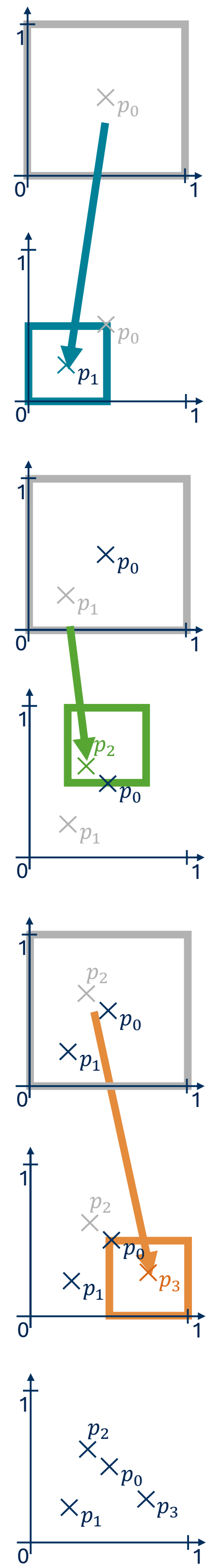
Aus den Funktionen f, g und h entsteht das sogenannte *Sierpinski-Dreieck*.



Links: Ergebnis der Kopieren-und-Einfügen-Methode nach 10 Wiederholungen.

Rechts: Ergebnis des Zufallspunkt-Verfahrens nach 100.000 Wiederholungen.





Erstelle dein eigenes Fraktal hier: anomasie.github.io/Fractals/